

YAPI STATİĞİ 1

DERS NOTLARI 7a

Prof. Dr. Cengiz Dünder

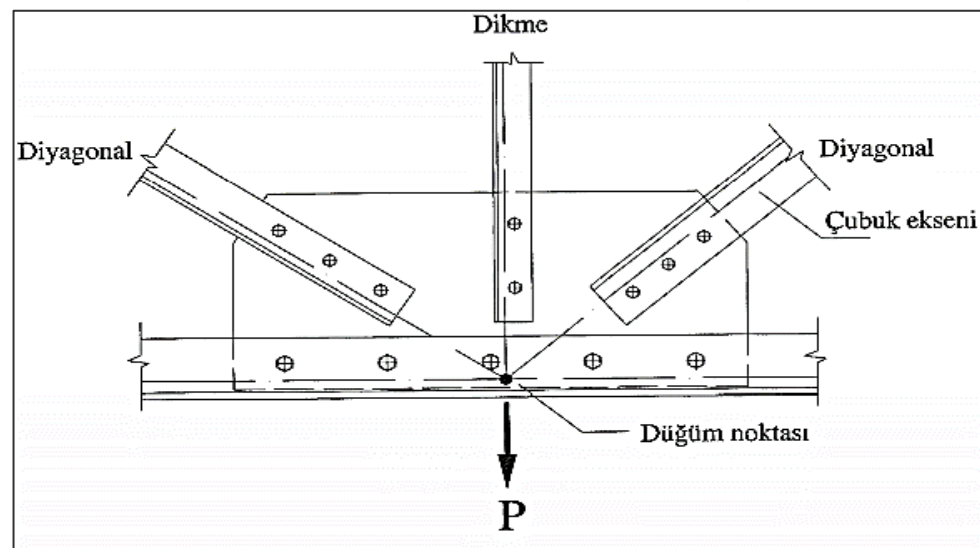
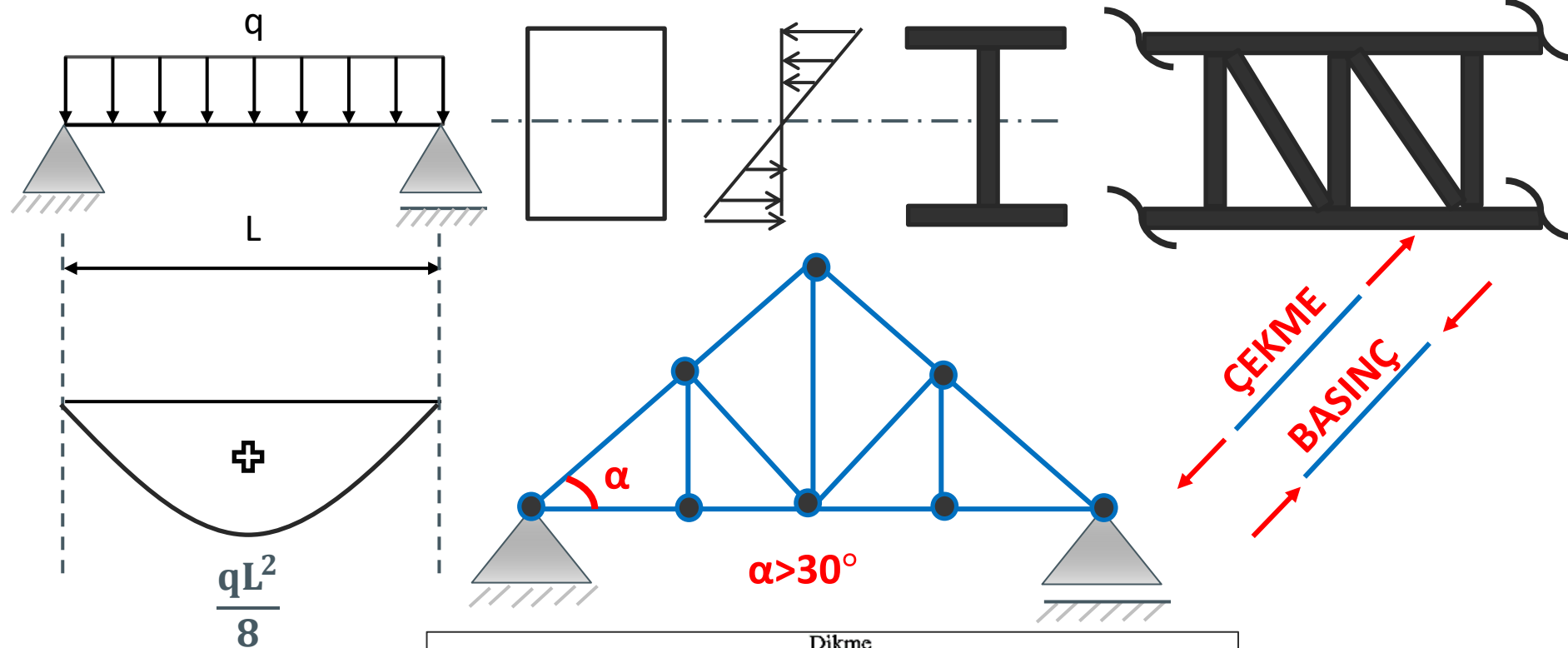
BÖLÜM 7 KAFES SİSTEMLER

Tanım ve Genel Bilgiler

Kafes sistemler, doğru eksenli çubukların birbirlerine mafsallı olarak birleşmesinden oluşan taşıyıcı sistemlerdir.

Özellikle büyük açıklıklara sahip dolu gövdeli sistemler, kendi öz ağırlıklarının fazla olması nedeniyle ekonomik değillerdir. Bu tip durumlarda köprülerde, büyük endüstri yapılarında büyük açıklıkların aşılması için kafes sistemlerden faydalanılır.

Şekilde en kesitte basit eğilme halindeki gerilme yayılımı gösterilmiştir. Görüldüğü gibi kesitin orta kısımlarındaki liflerin üst ve alt liflere göre kesitin taşıyıcılığına daha az katkı sağladığı anlaşılmaktadır. Bu sebeple bu tarz sistemlerde yapı ağırlığını azaltmak için orta bölgenin bir kısmı sistemden çıkarılarak dolu gövdeli I kesitli sistemler elde edilir. Daha büyük açıklıklarda ise orta kısım tamamen kaldırılıp bunun yerine kesme kuvvetini karşılamak için çubuklar konularak kafes sistemler elde edilir.



Kafes sistemlerde yükler direkt olarak düğüm noktalarına etkidüğinden kafes sistem çubuklarında kesme kuvveti ve eğilme momenti sıfır olmakta ve sadece eksenel normal kuvvetler meydana gelmektedir. Kafes sistemlerde yüklerin düğüm noktalarına etkimelerini sağlamak için enlemelerden faydalanılmaktadır.

Pratikte düğüm noktaları tam mafsallı olarak yapılamadığından sistemde eğilme momentleri dolayısı ile istenmeyen ikincil (ilave) gerilmeler meydana gelmektedir. Bu gerilmelerin en küçük olmasını sağlamak amacıyla düğüm noktaları oluşturulurken;

- a) Çubuk eksenleri ve yükler aynı düşey düzlem (sistem düzlemi) içinde olmalıdır.
- b) Çubuk eksenleri aynı noktada kesişmelidir.
- c) Yükler düğüm noktasına etkimelidir.
- d) Çubuklar arasındaki açı çok küçük olmamalıdır. ($\tan \alpha \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha \geq 26^\circ 57'$)
- e) Birleşim elemanlarının eksenini mümkünse çubuk eksenine ile çakıştırılmalı veya eksantriklik hesapta gözönüne alınmalıdır.

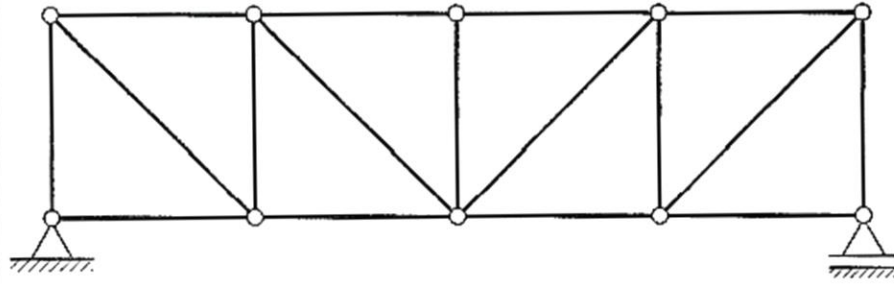
İzostatiklik Koşulu

Bir kafes sistemin izostatik olabilmesi için;

- d : düğüm noktası sayısını,
- r : mesnet tepkisi sayısını,
- $\ç$: çubuk sayısını göstermek üzere

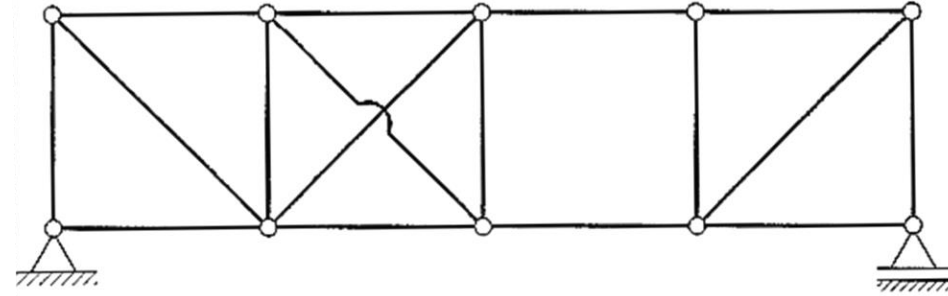
$$r + \ç = 2d$$

koşulu sağlanmalı ve ayrıca sistem taşıyıcı olmalıdır.



$$\begin{aligned} d &= 10, r = 3, \ç = 17 \\ 3 + 17 &= 2 \times 10 \\ 20 &= 20 \end{aligned}$$

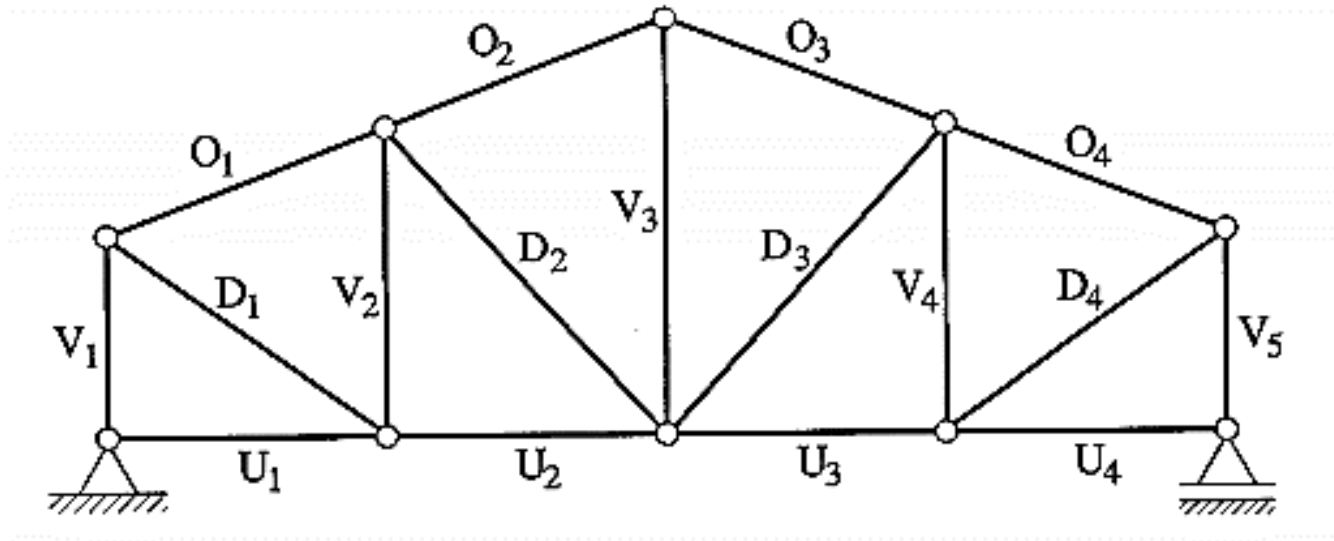
$\Rightarrow$ kafes sistem izostatik ve taşıyıcıdır.



$$\begin{aligned} d &= 10, r = 3, \ç = 17 \\ 3 + 17 &= 2 \times 10 \\ 20 &= 20 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ fakat kafes sistem taşıyıcı değil, oynaktır.

Çubukların Adlandırılması



O: Üst başlık çubukları

U: Alt başlık çubukları

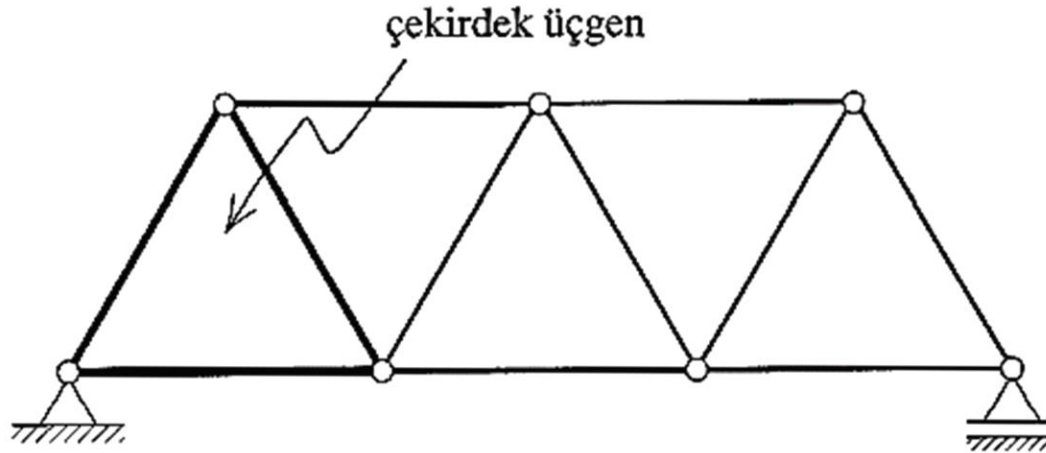
V: Dikme çubukları

D: Diagonal çubuklar

İzostatik Kafes Sistemlerin Sınıflandırılması

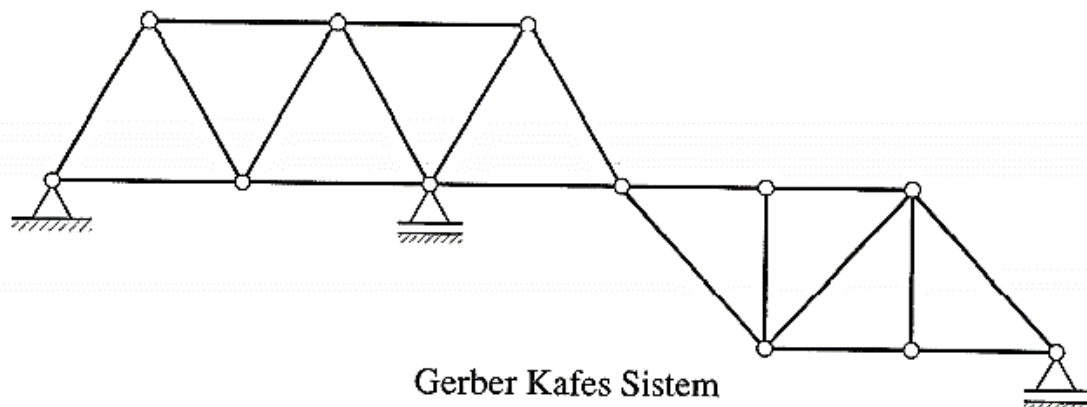
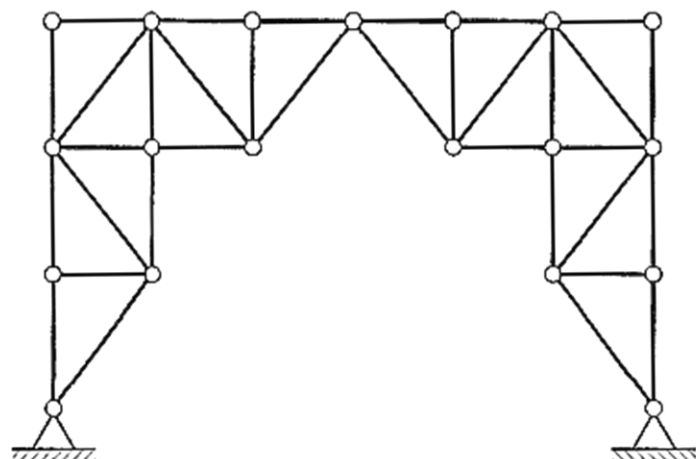
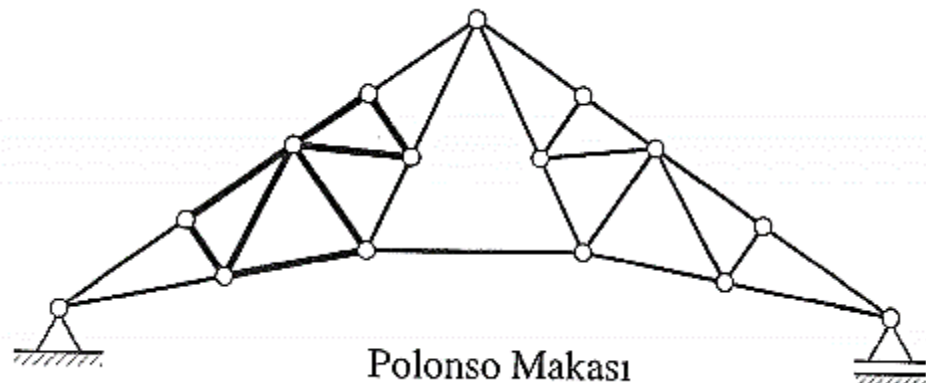
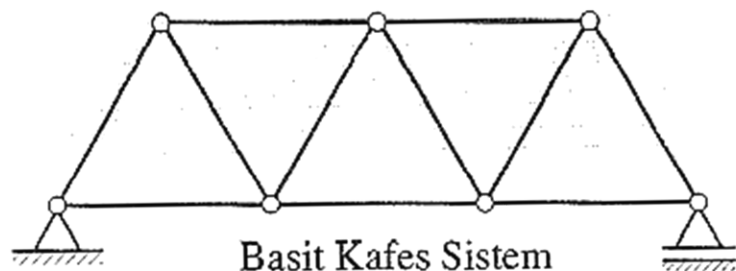
A) Kuruluş biçimlerine göre

A.1 Basit Kafes Sistemler : Bir çekirdek üçgene her seferinde iki çubuk ve bir düğüm noktası eklenmesiyle elde edilen sistemlerdir.

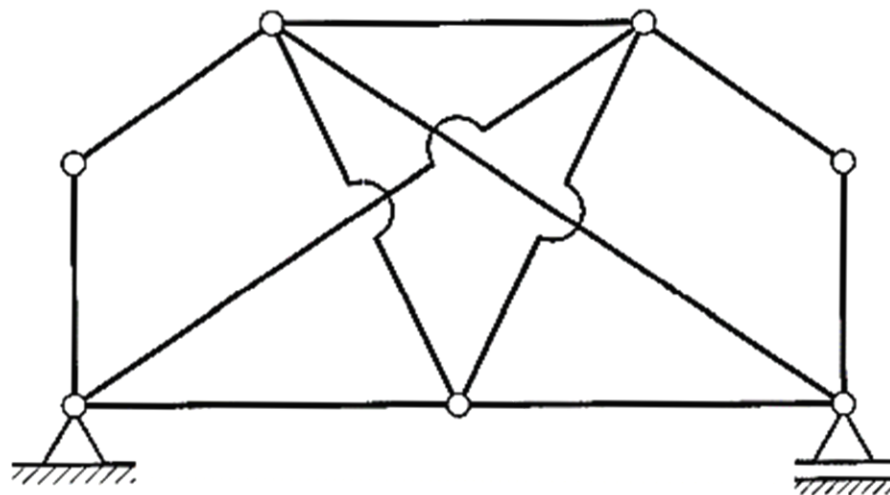


Bu sistemler mesnet tepkileri bakımından taşıyıcı ve izostatik oldukları sürece, daima taşıyıcı ve izostatiktirler.

A.2) Bileşik (kompoze) Kafes Sistemler : Basit kafes sistemlerin birbirlerine mafsalla ve/veya çubuklar ile birleştirilmesinden oluşan kafes sistemlerdir. Bunlara örnek olarak, Polonso makası, üç mafsallı kafes sistem, gerber kafes sistemler verilebilir.



A.3) Kompleks (karışık) Kafes Sistemler : Bu tür sistemlerin taşıyıcılıkları kontrol edilmelidir.



$$d=7, r=3, \varsigma=11$$

$$3+11=2 \times 7$$

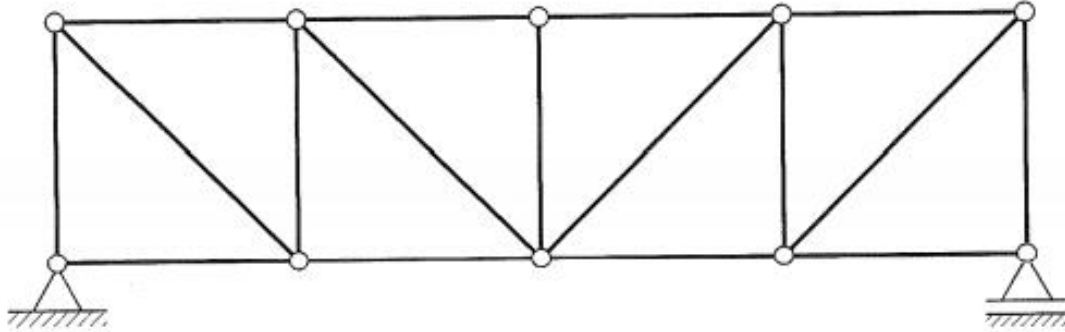
$$14=14$$

$\Rightarrow$ kafes sistem izostatiktir.

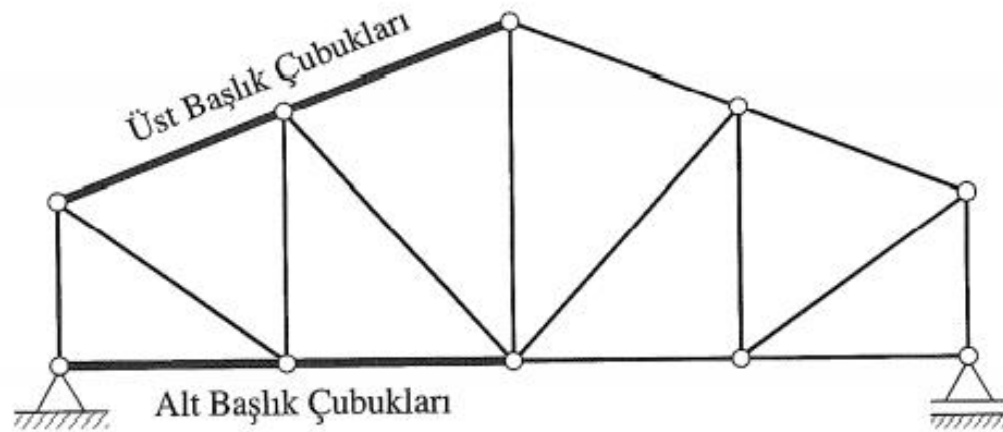
Kompleks kafes sistemler genel olarak düğüm noktaları denge yöntemi ve kesim yöntemiyle hesaplanamaz.

B) Başlıklarının durumuna göre

B.1) Paralel başlıklı sistemler

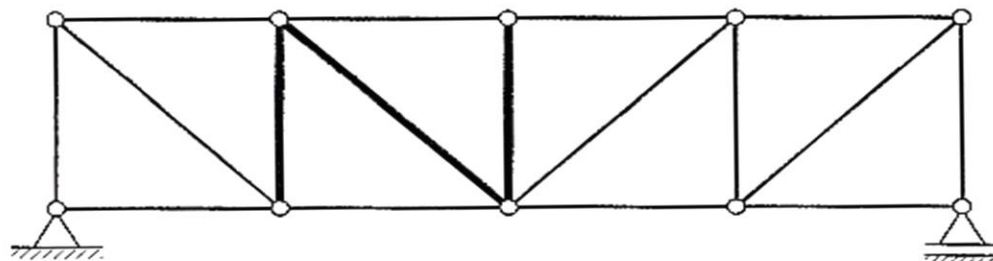


B.2) Paralel olmayan başlıklı sistemler

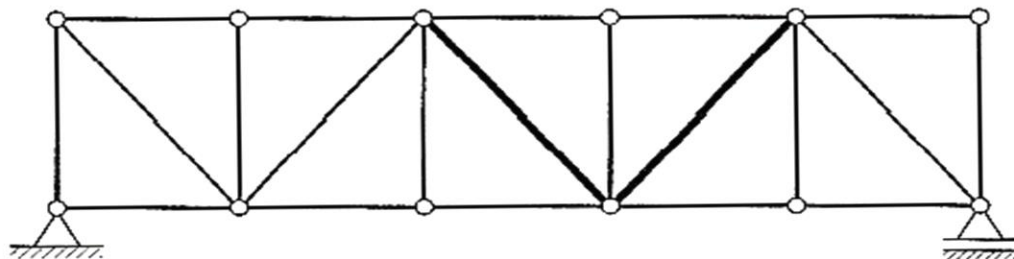


C) Dikme ve diyagonallerin şekline göre

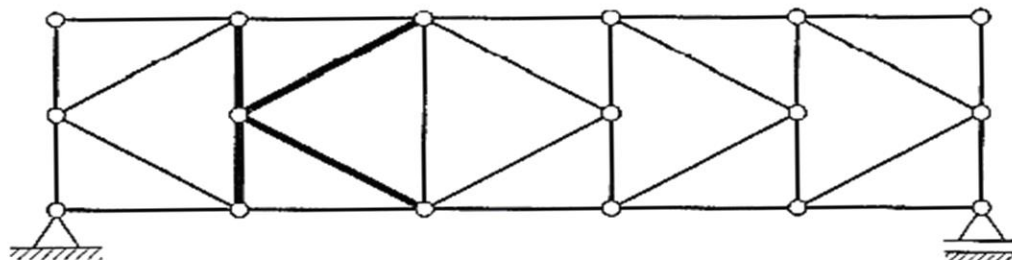
C.1) N tipi kafes sistemler



C.2) V tipi kafes sistemler

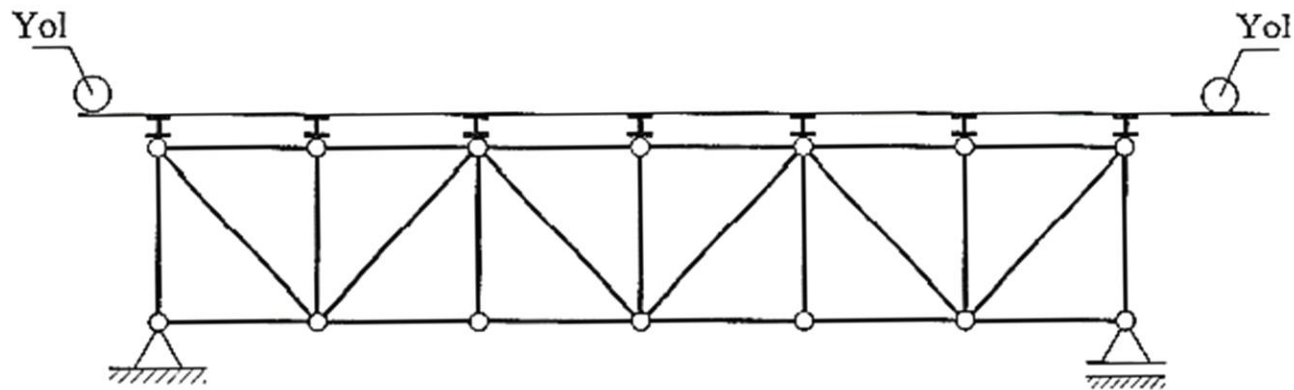


C.3) K tipi kafes sistemler

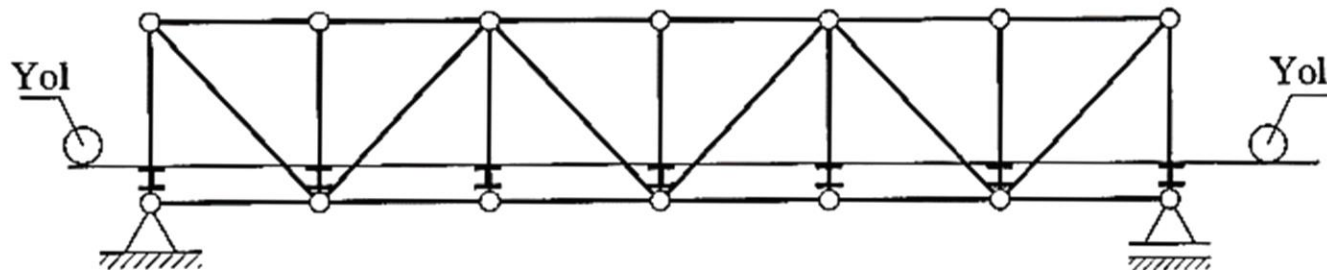


D) Yolu konumuna göre

D.1) Yolu üst başlıkta olan kafes sistemler



D.2) Yolu alt başlıkta olan kafes sistemler

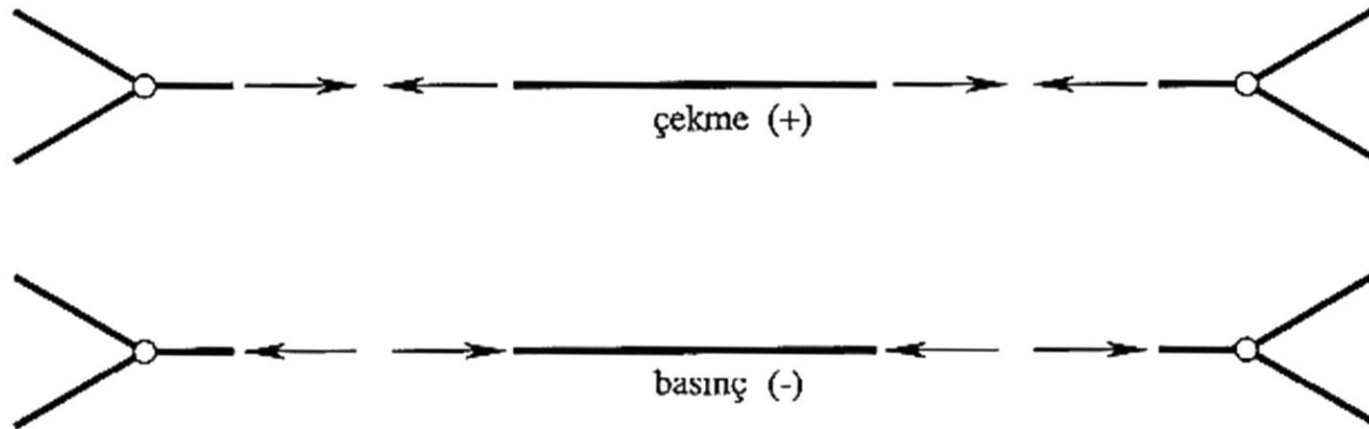


Hesap Yöntemleri

Sabit Yüklere Göre Hesap

Dış yüklerin direkt olarak düğüm noktalarına etki ettiği kafes sistemlerin çubuklarında, yalnız aksenal normal kuvvetler oluşur. Bu aksenal normal kuvvetler, çubuk kuvvetleri olarak adlandırılır.

Hesabın başlangıcında kafes sistemdeki bütün çubuk kuvvetlerinin çekme olduğu varsayılır. Hesap sonucunda bir çubuk kuvvetinin (-) olması halinde çubuğun çekmeye değil, basınca çalıştığı anlaşılır.



Hesap yöntemleri

1) Basit sistemler :

- a) düğüm noktaları denge denklemi
- b) Cremona yöntemi
- c) Kesim (Ritter) yöntemi

2) Bileşik kafes sistemler :

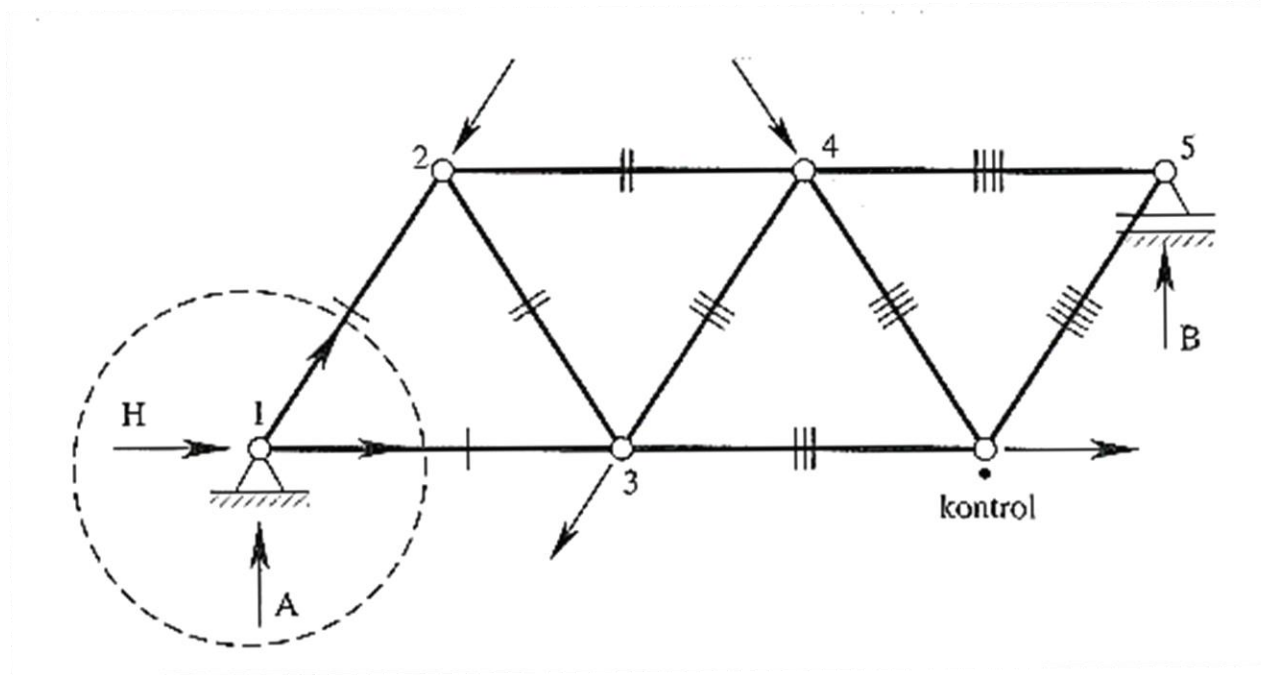
Sisteme ait denge koşulları yardımıyla bağ kuvvetleri ve mafsallı kuvvetleri bulunduğundan sonra her parça bir basit kafes sistem gibi hesaplanabilir.

3) Kompleks sistemler :

Bu sistemlerin hesabı için özel yöntemler uygulanır. (Çubuk değiştirme (Henneberg) yöntemi v.b.)

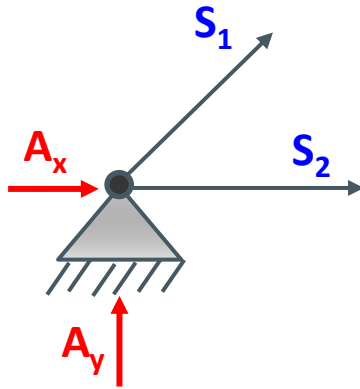
1. Dügüm Noktaları Denge Yöntemi

- ✓ Öncelikle mesnet tepkileri bulunur.
- ✓ Her düğüm noktası tek tek sistemden çıkarılıp yatay ve düşey izdüşüm denge denklemleri ile çubuk kuvvetleri hesaplanır.
- ✓ Bazı düğüm noktalarında ise denge denklemleri kontrol amacı ile kullanılır.



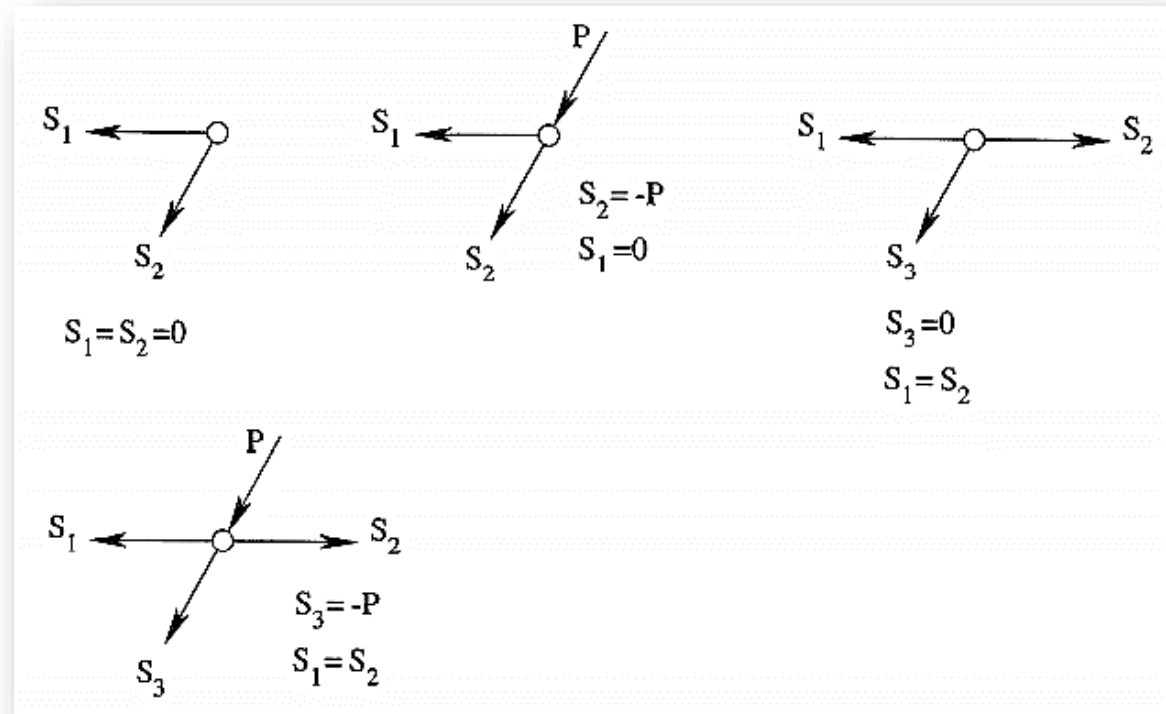
- ✓ Hesaba bilinmeyen iki çubuk kuvvetinin bulunduğu düğüm noktalarından başlanır.

- ✓ Her bir düğüm noktası için yatay ve düşey izdüşüm denklemi yazılarak bilinmeyen çubuk kuvvetleri kolaylıkla bulunabilir.
- ✓ Daha sonra tek tek en çok iki bilinmeyen çubuk kuvveti olacak şekilde düğüm noktaları göz önüne alınarak işleme devam edilir.



A_x ve A_y biliniyor.

$\sum F_x = 0$ ve $\sum F_y = 0$ yazılarak S_1 ve S_2 hesaplanır.



2. Cremona Yöntemi

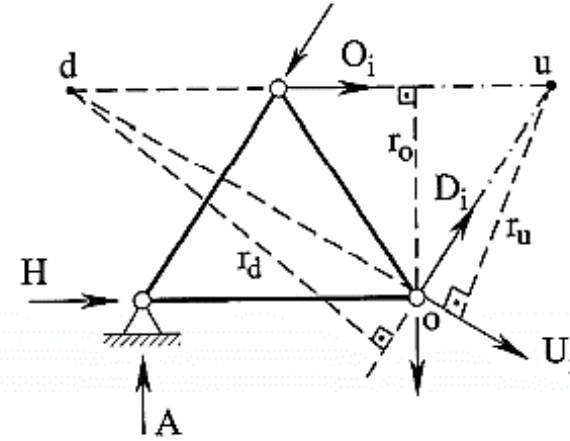
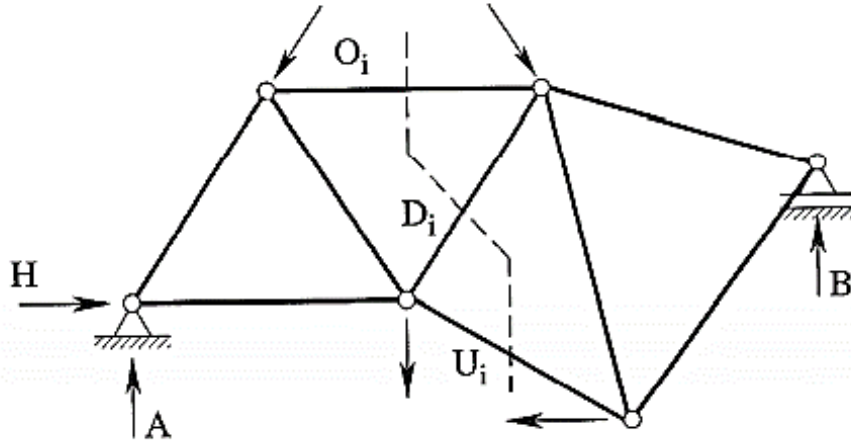
Düğüm noktaları denge yönteminin grafik gösterimidir.

3. Kesim (Ritter) Yöntemi

Kafes sistem uygun yerlerden kesilerek parçalara ayrılır ve bu parçalardaki çubuklara ait kuvvetler parçalardan her birine ait yazılacak olan 3 denge denklemi yardımıyla hesaplanır.

Yapılan kesimde en fazla 3 çubuk kesilecek olursa bu çubuklara ait çubuk kuvvetleri yazılacak olan $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ ve $\sum M = 0$ ifadeleri ile kolayca bulunabilir.

Denge denklemleri her denklemde 1 bilinmeyen olacak şekilde yazılır.



$$(\cup+) \Sigma M_o = 0 \quad (M_o)_0 + O_i \times r_o = 0$$

$$\Rightarrow O_i = -\frac{(M_o)_0}{r_o}$$

$$(\cup+) \Sigma M_u = 0 \quad (M_u)_0 - U_i \times r_u = 0$$

$$\Rightarrow U_i = \frac{(M_u)_0}{r_u}$$

$$(\cup+) \Sigma M_d = 0 \quad (M_d)_0 - D_i \times r_d = 0$$

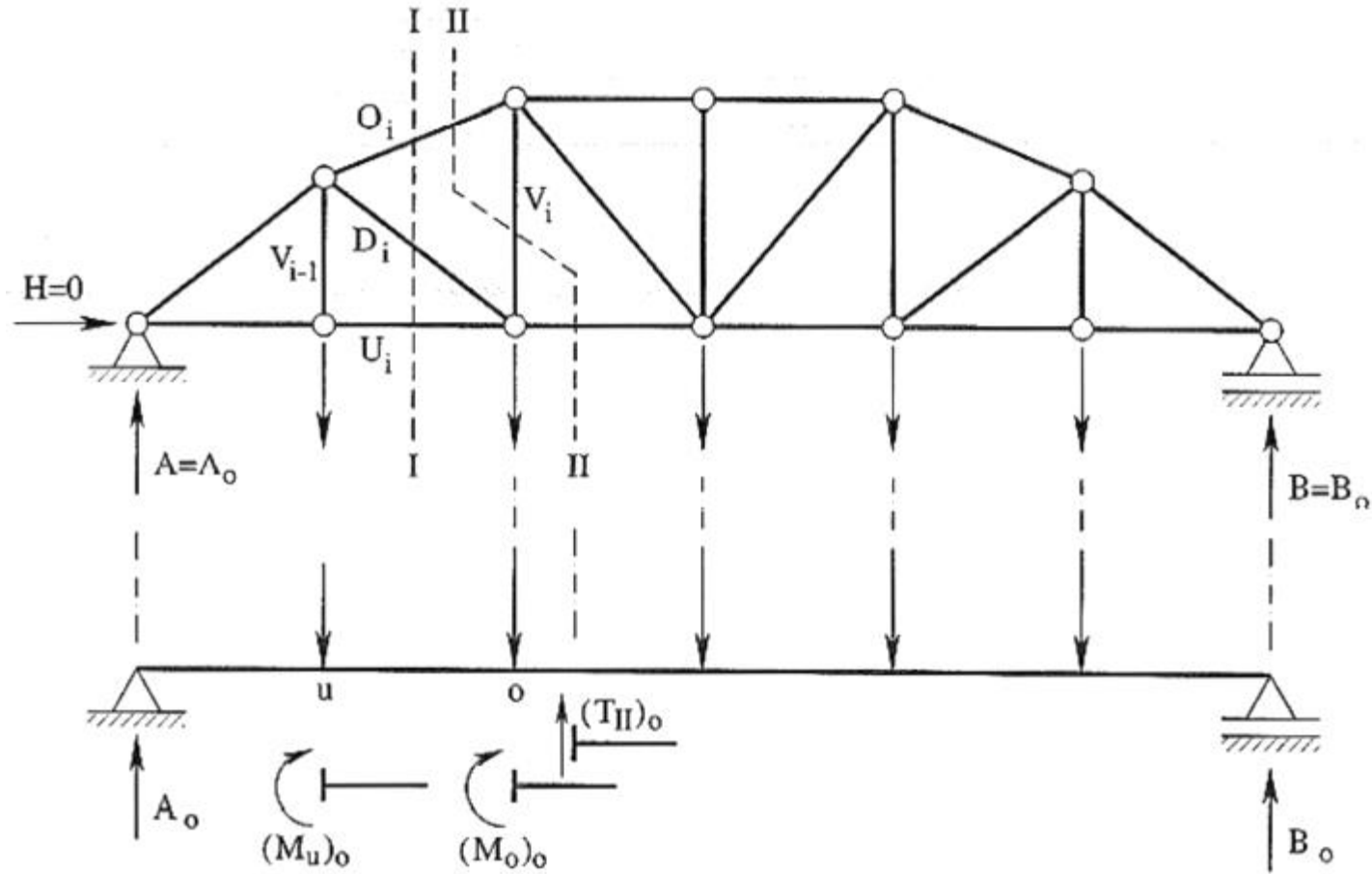
$$\Rightarrow D_i = \frac{(M_d)_0}{r_d}$$

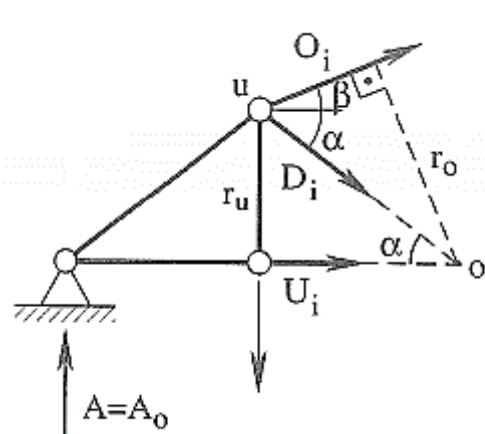
$(M_o)_0$, $(M_u)_0$, $(M_d)_0$: dış yüklerin ve mesnet tepkilerinin sırasıyla o, u, d noktalarına göre statik momentlerinin toplamını göstermektedir.

Çubuk kuvvetlerinden bazıları bulunduktan sonra diğerleri onlara bağlı olarak $\rightarrow \Sigma X = 0$, $\uparrow \Sigma Y = 0$, $\cup \Sigma M = 0$ denge denklemleri yardımıyla da hesaplanabilir.

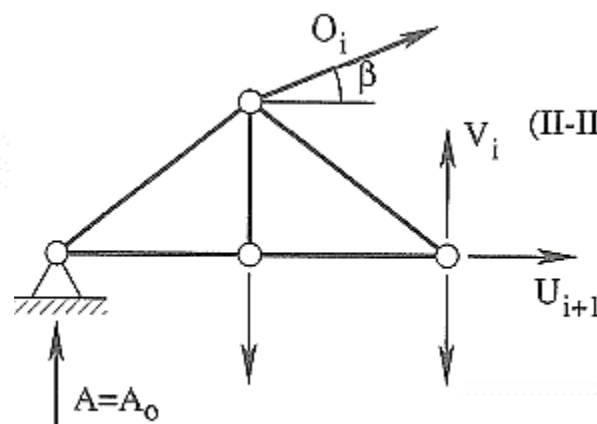
Sabit Yüklerin Düşey Olması Özel Hali

Sisteme etkiyen sabit yüklerin düşey olması özel halinde kafes sisteme ait çubuk kuvvetlerinin önemli bir bölümü aynı açıklıklı dolu gövdeli sistemin (basit kiriş, çıkmalı kiriş, gerber kiriş, üç mafsallı sistem) kesit zorlarına bağlı olarak hesaplanabilir.





(I-I) kesimi



(II-II) kesimi

a) Kesim Yöntemi ile,

(I-I) kesiminden,

$$(\cup+) \sum M_o = 0 \quad (M_o)_o + O_i \times r_o = 0 \quad \Rightarrow O_i = -\frac{(M_o)_o}{r_o}$$

$(M_o)_o$: Aynı açıklıklı dolu gövdeli sistemin o kesitindeki eğilme momenti

$$(\cup+) \sum M_u = 0 \quad (M_u)_o - U_i \times r_u = 0 \quad \Rightarrow U_i = \frac{(M_u)_o}{r_u}$$

$(M_u)_o$: Aynı açıklıklı dolu gövdeli sistemin u kesitindeki eğilme momenti

$$(\uparrow+) \sum Y_I = 0 \quad (T_I)_o + O_i \times \sin \beta - D_i \times \sin \alpha = 0 \quad \Rightarrow D_i = \frac{1}{\sin \alpha} [(T_I)_o + O_i \sin \beta]$$

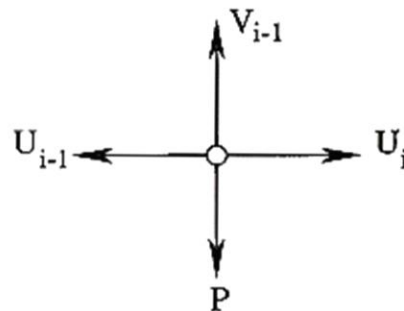
$(T_I)_o$: Aynı açıklıklı dolu gövdeli sistemin I kesitindeki kesme kuvveti

(II-II) kesiminden,

$$(\uparrow+) \Sigma Y_{II} = 0 \quad (T_{II})_0 + O_i \times \sin\beta + V_i = 0 \quad \Rightarrow V_i = -[(T_{II})_0 + O_i \sin\beta]$$

$(T_{II})_0$: Aynı ağırlıklı basit kirişin II kesitindeki kesme kuvveti

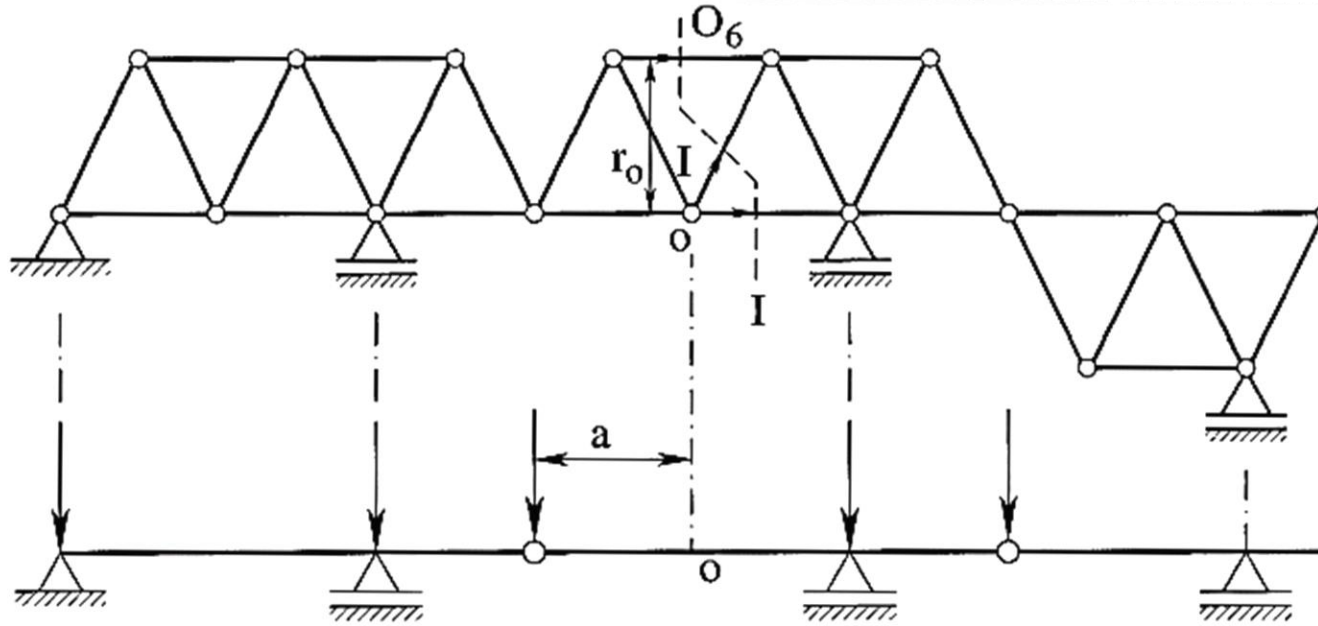
b) Düğüm Noktaları Denge Yöntemi ile,



$$P = 0 \Rightarrow V_{i-1} = 0$$

$$P \neq 0 \Rightarrow V_{i-1} = P$$

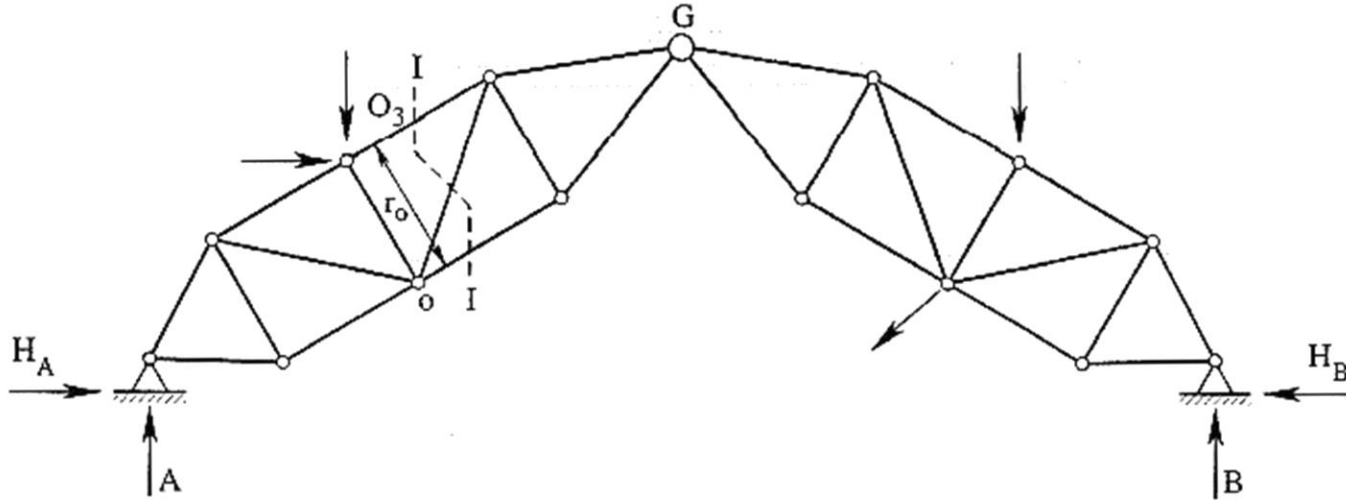
Gerber Kafes Sistemler



Sabit Yüklere Göre Hesap :

Sistemin taşıma şeması çizilir. Mafsal kuvvetleri ve mesnet tepkileri gerber kirişleri gibi hesaplanır. Sonra her parça teker teker ele alınarak çubuk kuvvetleri bulunur.

Üç Mafsallı Kafes Sistemler

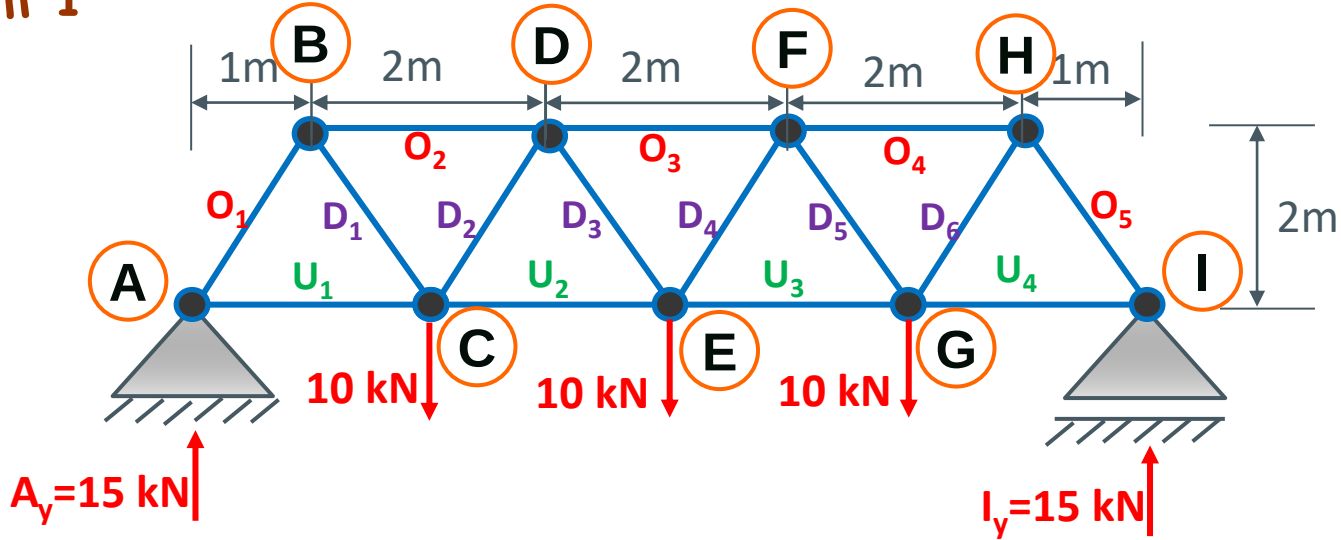


Sabit Yüklere Göre Hesap :

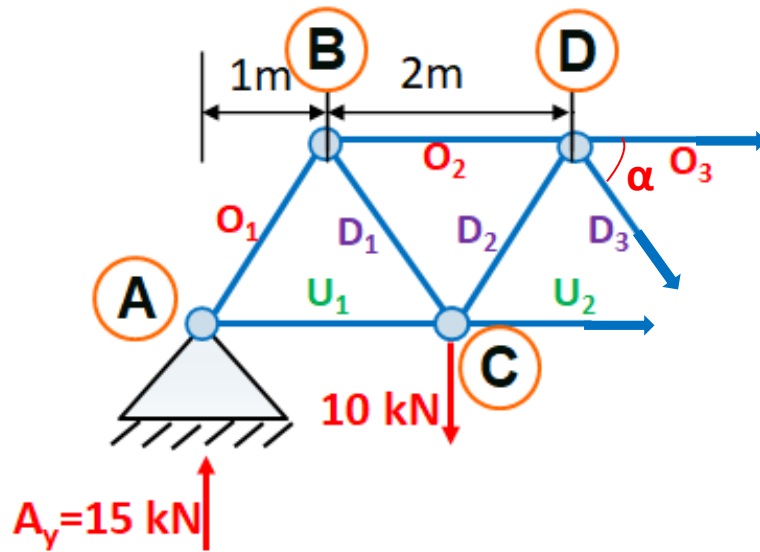
Denge denklemleri ve mafsallı koşulu yardımıyla mesnet tepkileri aynen üç mafsallı dolu gövdeli sistemlerde olduğu gibi hesaplandıktan sonra, düğüm noktaları denge yöntemi ve kesim yöntemi yardımıyla çubuk kuvvetleri bulunur.

Çözümlü Problemler

Problem 1



Yüklemeye ve mesnet reaksiyonları verilmiş olan şekildeki sistemde O_3 , D_3 ve U_2 çubuk kuvvetlerini bulunuz.



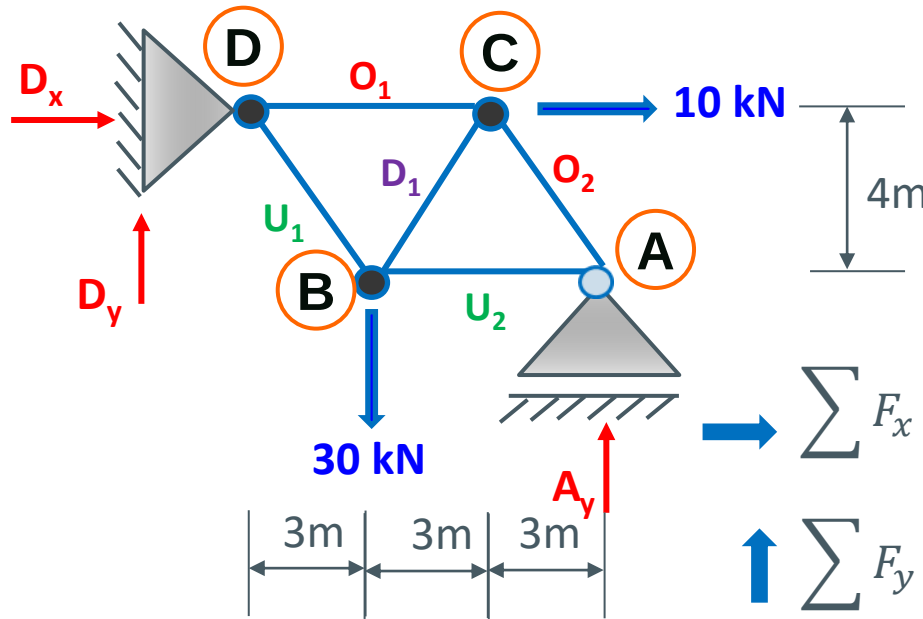
$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.447 \quad \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0.894$$

$$\begin{aligned} \curvearrowright \sum M_D = 0 \quad & 2U_2 + 10 * 1 - 15 * 3 = 0 \\ & U_2 = 17.5 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \sum F_x = 0 \quad & O_3 + D_3 * \cos \alpha + U_2 = 0 \\ & O_3 + 0.447D_3 = -17.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \uparrow \sum F_y = 0 \quad & 15 - 10 - D_3 * \sin \alpha = 0 \\ & D_3 = 5.59 \text{ kN} \\ & O_3 \cong -20 \text{ kN} \end{aligned}$$

Problem 2



Verilen sistemde mesnet tepkilerini ve çubuk kuvvetlerini hesaplayınız.

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \quad D_x + 10 = 0 \quad D_x = -10 \text{ kN}$$

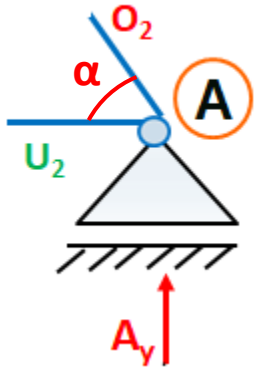
$$\uparrow \sum F_y = 0 \quad D_y + A_y = 30 \text{ kN}$$

$$\curvearrowleft \sum M_D = 0 \quad 9A_y - 90 = 0 \quad A_y = 10 \text{ kN}$$

$$D_y = 20 \text{ kN}$$

Bilinmeyen sayısı 2 olacak şekilde sistemden istenilen düğüm noktası çıkarılarak düğüm noktası yatay ve düşey izdüşümü yazılarak çubuk kuvvetleri hesaplanır.

A DÜĞÜMÜ:



$$\cos \alpha = \frac{3}{5} = 0.6 \quad \sin \alpha = \frac{4}{5} = 0.8$$

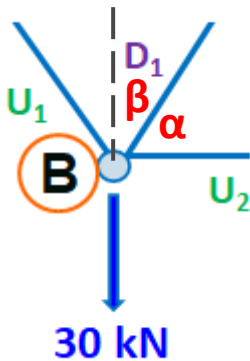
$$\sum F_x = 0 \quad U_2 + O_2 * \cos \alpha = 0$$

$$U_2 = -0.6 O_2$$

$$\sum F_y = 0 \quad 10 + O_2 * \sin \alpha = 0$$

$$O_2 = -12.5 \text{ kN} \quad U_2 = 7.5 \text{ kN}$$

B DÜĞÜMÜ:



$$\alpha = \beta \quad \cos \alpha = \frac{3}{5} = 0.6 \quad \sin \alpha = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$U_2 = 7.5 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \quad U_2 + D_1 * \cos \alpha - U_1 * \cos \alpha = 0$$

$$0.6 D_1 - 0.6 U_1 = -7.5 \text{ kN}$$

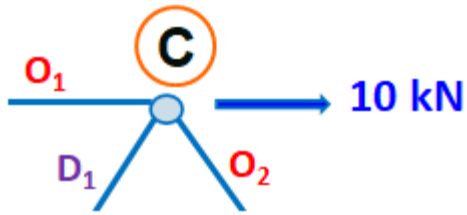
$$\sum F_y = 0 \quad D_1 * \sin \alpha + U_1 * \sin \alpha = 30 \text{ kN}$$

$$0.8 D_1 + 0.8 U_1 = 30 \text{ kN}$$

$$D_1 = 12.5 \text{ kN}$$

$$U_1 = 25 \text{ kN}$$

C DÜĞÜMÜ:



$$O_2 = -12.5 \text{ kN}$$

$$D_1 = 12.5 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \quad O_1 - 10 + 12.5 * 0.6 + 12.5 * 0.6 = 0$$
$$O_1 = -5 \text{ kN}$$